



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

TM-77223

Н.С. Ерохин, А.П. Фадеев

N83-30835

К ТЕОРИИ САМОФОКУСИРОВКИ МОЩНЫХ ВОЛНОВЫХ
ПУЧКОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ



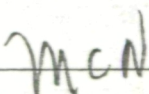
Препринт № 128 за 1982 г.

Москва.

Routing Slip

Mail Code	Name	Action
STIF	Phil French	Approval
		Call me
		Concurrence
		File
		Information
		Investigate and Advise
		Note and Forward
		Note and Return
		Per Request
		Per Phone Conversation
		Recommendation
		See me
		Signature
		Circulate and Destroy

Enclosed are nine reports (~~xx~~ preprints)
from the Institute of Applied Mathematics
imeni M.V. Keldysh, Academy of Sciences
USSR: No. 87, 90, 99, 116, 120, 128, 130
135 and 136, for processing and announcement
in STAR.

Name	 M.C. Nagurney	Tel. No. (or Code) & Ext. 75503582
Code (or other designation)	NIT-44	Date 5/5/83

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им.М.В.КЕЛДЫША АКАДЕМИИ НАУК СССР

Н.С.Ерохин, А.П.Фадеев

К ТЕОРИИ САМОФОКУСИРОВКИ МОЩНЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ
В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Москва
-1982-

Abstract

In the case of local nonlinearity the stationary self-focusing of the Gauss wave beam is considered in a nonhomogeneous medium. Equations of the absorptionless approximation for the beam width, the field on the beam axis and the refraction factor are integrated on a computer. Investigation is carried out for the self-focusing in dependence of the nonlinearity level, the initial divergence, the dissipation, the length of nonhomogeneity of the dielectric permeability nondisturbed by a beam, and the diffraction parameter.

АННОТАЦИЯ

~~В случае локальной нелинейности рассмотрена стационарная самофокусировка гауссовского волнового пучка в неоднородной среде. Уравнения безабберационного приближения для ширины пучка, поля на оси пучка и показателя преломления интегрируются на ЭЕМ. В численном эксперименте исследована зависимость самофокусировки от уровня нелинейности, начальной расходимости, величины диссипации, длины неоднородности невзмущенной пучком диэлектрической проницаемости и параметра дифракции.~~

Ключевые слова: волновой пучок, самофокусировка, неоднородная среда, глубина проникновения, конечно-разностный метод.

ВВЕДЕНИЕ

Решение ряда научно-технических проблем невозможно без всестороннего изучения нелинейного взаимодействия и самовоздействия мощных потоков излучения в диэлектриках и газах. Поэтому не случайно в последние годы к этой области исследований проявляется большой интерес (см., например, [1-4]). К числу замечательных проявлений самовоздействия безусловно относится самофокусировка пучков электромагнитных волн [1-3, 5]. Суть этого явления заключается в том, что под действием поля пучка средние параметры среды изменяются таким образом, что возникает нелинейная рефракция лучей к оси пучка и компрессия его в поперечной плоскости. В результате согласованного схождения лучей первоначально толстый волновой пучок сжимается в сверхтонкую нить, в пределах которой плотность энергии электромагнитного поля возрастает на два и более порядков величины.

К настоящему времени самофокусировка волновых пучков в однородных средах изучена достаточно подробно (см., например, обзорные статьи [1-3]). Однако в реальных условиях, в частности в лабораторной и ионосферной плазме, расположение трассы распространения волнового пучка обычно существенно зависит от распределения градиентов плотности, температуры и других параметров. В связи с этим важно знать, каким образом неоднородность может влиять на характер распространения самофокусирующихся волновых пучков. В отличие от случая однородных сред, теория самофокусировки волновых пучков с учетом неоднородности фактически еще только разрабатывается [6-11], что отчасти обусловлено значительными математическими трудностями аналитических расчетов, так как задача сводится к решению нелинейных уравнений с зависящими от пространственных координат и, вообще говоря, времени коэффициентами. В настоящем препринте следуя работе [12] численно изучена самофокусировка волнового пучка, распространяющегося в неоднородной среде вдоль градиента диэлектрической проницаемости. Ввиду сложности задачи здесь рассмотрен наиболее простой случай статической нелинейности и стационарной самофокусировки. Исследуются зависимость длины самофокусировки от характерного

пространственного масштаба неоднородности L , поглощения энергии пучка и прохождение его в область, непрозрачную для волн малой амплитуды. Обсуждается возможность волноводного распространения пучка в неоднородной среде и зависимость эффекта от степени нелинейности.

1. Основные уравнения.

В скалярной задаче стационарная самофокусировка пучков электромагнитных волн может быть исследована в рамках следующего уравнения эллиптического типа для комплексной амплитуды электрического поля $E(x, \vec{r}_\perp)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \vec{\nabla}_\perp^2\right)E + \kappa_0^2 \varepsilon(x, |E|^2) E = 0, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon \equiv \varepsilon_r + i\varepsilon_i$, зависящая от продольной координаты x и поля волнового пучка, комплексная диэлектрическая проницаемость неоднородной плазмы с характерным полем нелинейности E_p , $\kappa_0 = \omega/c$ для поперечных, либо $\kappa_0 = \omega/v_{Te}\sqrt{3}$ для ленгмювских волн, ω - частота, v_{Te} - тепловая скорость электронов.

Выделим в $E(x, \vec{r}_\perp)$ вещественные амплитуду A и фазу φ , т.е. $E = A \exp\{-i\varphi\}$. Тогда при аксиальной симметрии волнового пучка из (1.1) получим уравнения для эйконала и потока энергии

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_\perp}\right)^2 = \kappa_0^2 \varepsilon_i(x, A^2) + \frac{\Delta A}{A}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left(A^2 r_\perp \frac{\partial \varphi}{\partial r_\perp} \right) = \kappa_0^2 A^2 \varepsilon_r(x, A^2).$$

Пусть a - поперечный размер волнового пучка, $\kappa_0 = \kappa_0 \sqrt{\varepsilon}$ характерное продольное волновое число. При естественном для волнового пучка условии $|\kappa_0 a| \gg 1$ поле E имеет большую фазу φ , поэтому решение (1.2) может быть получено методом геометрической оптики, подобным изложенному в [13]. Как обычно в теории самофокусировки будем считать пучок гауссовским. Учитывая автомодельный характер сжатия волнового пучка в приосевой области положим

$$A(x, r_\perp) = A_0(x) \exp\{-r_\perp^2/2a^2(x)\}, \quad (1.3)$$

$$\varphi(x, r_\perp) = \int_{x_0}^x \kappa_0(x) dx + r_\perp^2 \varphi_1(x) + \dots,$$

где A_c амплитуда поля на оси пучка. Введем эффективные показатели преломления $N_z(z) = \kappa_0(z)/\kappa_0$ и ширину пучка $l(z)$

$$l^2(z) = a^2(z) (1+U); \quad U(z) = \frac{l^2}{2N_z} \frac{d}{dz} \left(\frac{N_z}{l} \frac{dl}{dz} \right).$$

Подставляя (I.3) в (I.2) получаем систему связанных нелинейных уравнений для ширины пучка $l(z)$, показателя преломления $N(z)$ и поля на оси пучка $A_c(z)$

$$(2+\psi) N_z \frac{d}{dz} N_z \frac{dl}{dz} + \frac{\psi}{l} N_z^2 \left[2 - \left(\frac{dl}{dz} \right)^2 \right] = \frac{2}{l} \left(\frac{A_c}{l} \right)^2; \quad (I.4)$$

$$\frac{d}{dz} \ln(A_c^2 l^2 N_z) = \alpha_z(z); \quad N_z^2 + 2 \left(\frac{A_c}{l} \right)^2 = \varepsilon_z(A_c^2).$$

Здесь $\psi = (A_c/N_z)^2 \partial z / \partial (A_c^2)$ характеризует нелинейный вклад в диэлектрическую проницаемость, $\alpha_z = (\kappa_0/N_z) \varepsilon_i(A_c^2)$ декремент затухания, $\lambda = 1/\kappa_0$.

Система уравнений (I.4) является исходной для изучения в безабберационном приближении распространения самофокусирующегося волнового пучка. Ясно, что в общем случае произвольных неоднородности и нелинейности она может быть проинтегрирована только численно. Конкретизируем вид диэлектрической проницаемости и профиль неоднородности. Возьмем следующую зависимость диэлектрической проницаемости от поля пучка

$$\varepsilon_z(A^2) = 1 - [1 - \varepsilon_0(z)] \exp\{-A_c^2/E_p^2\}, \quad (I.5)$$

которая характеризует перераспределение плазмы в неоднородном высокочастотном поле, причем $\varepsilon_0(z)$ линейная диэлектрическая проницаемость. Для удобства численных расчетов следует перейти к безразмерным переменным. Введем безразмерные ширину пучка

$u = l(z)/l_0$, расстояние от плоскости инжекции пучка $t = z/l_0$ и диссипативный фактор $W = (A_c/E_m)^2 (l^2 N_z / N_0)$, определяющий поглощение энергии волнового пучка, где E_m амплитуда поля пучка в плоскости инжекции. Заметим, что в отсутствие диссипации ($\varepsilon_i = 0$) $W = 1$.

Теперь с учетом (I.5) система уравнений (I.4) преобразуется к виду

$$\frac{du}{dt} = \frac{v}{N_z}; \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{\alpha_z}{N_z} (1-N_z) W; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{Q/u^3}{N_z(1+\Phi)}, \quad (I.6)$$

здесь

$$\Phi = \frac{(1-\varepsilon_0)}{N_z^2} \exp\{-I\}; \quad Q = \alpha_3 + \Phi u^2 (v^2 N_z^2). \quad (I.7)$$

Функция $I(t)$ в (I.7) является безразмерной плотностью энергии на оси пучка $I = (A_c/E_p)^2 \equiv (\alpha_1 W N_0 / u^2 N_z)$. В формулах (I.6), (I.7) параметры α_1 , α_2 , α_3 вычисляются по "начальным" данным и характеризуют влияние соответственно: нелинейности $\alpha_1 = (\varepsilon_m/\varepsilon_p)^2$, поглощения $\alpha_2 = (l_0/\varepsilon_i)/\lambda$ и дифракции $\alpha_3 = (\lambda/l_0)^2$. Показатель преломления на оси пучка $N_z(t)$ находится из нелинейного уравнения

$$N_z^2 = 1 - 2\alpha_3/u^2 - [1 - \varepsilon_0(t)] \exp\{-I(t)\},$$

неоднородность плазмы входит через линейную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_0(t)$, которую в дальнейшем считаем линейной функцией $\varepsilon_0(t) = \rho_0(1 - \alpha_4 t)$, где $\alpha_4 = l_0/L$ и L — длина неоднородности невозмущенной полем пучка плотности плазмы. Начальные данные к уравнениям (I.6) $u_0 = W = 1$,

$$N_0^2 = 1 - 2\alpha_3 - (1 - \rho_0) \exp\{-\alpha_1\}, \quad v_0 = N_0 \frac{dl}{dx}. \quad (I.8)$$

Как видно из (I.8), v_0 определяется "начальной" расходимостью волнового пучка.

При отсутствии аксиальной симметрии волнового пучка исследование его самофокусировки существенно усложняется. Например, для пучка с эллиптической формой поперечного сечения амплитуда и фаза в безабберационном приближении имеют вид

$$A(x, y, z) = A_0(z) \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right\}; \quad \varphi = \int k_0(z) dz + x^2 \varphi_x(z) + y^2 \varphi_y(z) + \dots$$

Теперь при самофокусировке пучка в области прозрачности и малом поглощении полуоси эллипса эволюционируют согласно уравнениям

$$\frac{d^2 \sigma_x}{d\eta^2} + \frac{A_c^2}{\alpha} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \eta^2} = \frac{\lambda^2}{\alpha^2}; \quad \frac{d^2 \sigma_y}{d\eta^2} + \frac{A_c^2}{\beta} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \eta^2} = \frac{\lambda^2}{\beta^2}, \quad (I.9)$$

где $d\eta = dx/N_z(x)$ и $A_c^2 = (\alpha_0 \varepsilon_0 N_0 / \alpha \varepsilon N_z) E_m^2$. В более наглядной форме система уравнений (I.9) записывается при переходе к переменным: $\alpha = R \sin \theta$, $\beta = R \cos \theta$. Функция R характеризует сжатие волнового пучка в целом, а угловая переменная θ ($0 < \theta < \pi/2$) определяет эволюцию нарушения аксиальной симметрии в распределении интенсивности пучка в поперечной к направлению распространения плоскости (x, y) . В новых переменных уравнения (I.9) для кубической нелинейности

принимают вид

$$\frac{d^2 R^2}{d\eta^2} = 2 \mathcal{E}(\eta); \quad \frac{d\mathcal{E}}{d\eta} = -\frac{2a_0 b_0}{R^2} \frac{E_m^2}{\sin \theta \cos \theta} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{N_z}{N_z} \right), \quad (I.10)$$

где

$$\mathcal{E} = \left(\frac{dR}{d\eta} \right)^2 + R^2 \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)^2 + \frac{1}{R^2 \sin \theta \cos \theta} \left(\frac{\chi^2}{\sin \theta \cos \theta} - 2a_0 b_0 \frac{N_0 E_m^2}{N_z E_p^2} \right).$$

В случае однородной среды, когда $N_z = \text{const}$, уравнения (I.10) легко интегрируются [14], поскольку $\mathcal{E} = \text{const}$.

Причем самофокусировке отвечает выбор начальных данных, при котором $\mathcal{E} < 0$, а полуоси эллипса испытывают колебания с уменьшающимися по мере приближения к фокусу периодом осцилляций.

$\theta_0 \leq \theta \leq (\pi/2) - \theta_0$. В неоднородной среде уравнения (I.10) можно проинтегрировать численно задав профиль $N_z(z)$ и начальные данные в плоскости инжекции a_0 , b_0 , da_0/dx_0 , db_0/dx_0 .

Характер влияния неоднородности усматривается из уравнения для $\mathcal{E}(\eta)$. Видно, что при движении волнового пучка в сторону уменьшения показателя преломления $N_z(z)$, функция $\mathcal{E}(\eta)$ убывает и, следовательно, согласно уравнению для $R(\eta)$ самофокусировка пучка упрощается. В обратном случае — движения пучка в сторону роста N_z самофокусировка замедляется.

2. САМОФОКУСИРОВКА ВОЛНОВОГО ПУЧКА В ОБЛАСТИ ПРОЗРАЧНОСТИ

Рассмотрим вначале аналитически распространение самофокусирующегося волнового пучка в неоднородной среде в области прозрачности. Считая затухание несущественным выразим амплитуду волнового поля через показатель преломления и ширину пучка.

$A_c^2 = (E_m^2 L_0^2 N_0 / l^2 N_z)$. При самофокусировке пучка в области прозрачности на достаточном удалении от поверхности отсечки нелинейную часть диэлектрической проницаемости в показателе преломления можно не учитывать и тогда $N_z \approx \sqrt{\epsilon_0(z)}$. Теперь в наиболее часто встречающемся случае кубической нелинейности, когда $\epsilon_z = \epsilon_0(z) + (A_c / E_p)^2$, из (I.4) получаем следующее уравнение для безразмерной ширины пучка $f = l/L_0$.

$$\frac{d^2 f}{df^2} + \frac{1}{f^3} \left[\frac{N_0}{N_z(\xi)} \frac{E_m^2}{E_p^2} - \left(\frac{\chi}{L_0} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $d\xi = dz/l_0 N_z(\xi)$ — безразмерная координата, $\xi = 0$ — плоскость инжекции волнового пучка, $N_0 = N_z(0)$. Уравнение (2.1) описывает нелинейный осциллятор и в случае однородной среды, когда $N_z = \text{const}$, интегрируются элементарно (см., например, [1]), причем пучок самофокусируется, если в плоскости инжекции уровень нелинейности выше пороговой

$$\left(\frac{E_m}{E_p}\right)^2 > \left(\frac{\lambda}{l_0}\right)^2 + \left(N_0 \frac{dl_0}{dz}\right)^2.$$

В неоднородной среде показатель преломления N_z зависит от координаты $\xi(z)$, что может привести, в частности, к изменению соотношения между дифракцией и нелинейностью по мере распространения волнового пучка. Если пучок распространяется в сторону роста плотности плазмы, показатель преломления $N_z(\xi)$ убывает и, как нетрудно усмотреть из (2.1), вклад нелинейности по сравнению с дифракцией увеличивается. Следовательно, самофокусировка пучка ускорителя. Более того, коллимированный пучок с малым уровнем начальной нелинейности $E_m < E_p \lambda/l_0$ за поверхность $N_z < N_0(E_m l_0/E_p \lambda)^2$ захватывается в режим самофокусировки. Наоборот, при распространении пучка в сторону роста показателя преломления $N_z(z)$ вклад нелинейности по сравнению с дифракцией уменьшается. В результате длина самофокусировки увеличивается, и даже может произойти срыв режима самофокусировки, если нелинейность упадет ниже порогового уровня.

При произвольной зависимости N_z от координаты точное решение уравнения (2.1) неизвестно. Однако можно указать класс профилей $E_0(z)$, $N_z(\xi)$, которые с одной стороны отражают характерные случаи распространения волнового пучка в неоднородной среде, а с другой — допускают преобразование (2.1) к автономному уравнению и основные свойства решений легко устанавливаются из довольно простой структуры фазовой плоскости. Параметрически указанный класс профилей $E_0(z)$ задается уравнениями $E_0 = (dz/l_0 d\xi)^2$;

$$z(\xi) = L \frac{J(\xi/\xi_m)}{J_0(1)}; \quad J_0(y) = \int_0^y \frac{ds}{1 - (\gamma - 1)(1-s)^6}, \quad (2.2)$$

где $\xi_m = \frac{1}{\gamma N_0 J_0(1)} \frac{l_0}{L}$, $\gamma = \left(\frac{E_m l_0}{E_p \lambda}\right)^2$ определяет соотношение между дифракцией и нелинейностью в плоскости ин-

жекции, L - характерный масштаб неоднородности, b - вещественное число, связанное с крутизной профиля $\varepsilon_0(z)$, и $\xi < \xi_m$. Для $b = -1$ численное интегрирование уравнения (2.1) проведено в работе [8].

С помощью подстановки

$$f(z) = X(T) \exp \left\{ - \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) T \right\}; \quad T = -\frac{1}{2} \ln(1 - \xi/\xi_m),$$

уравнение (2.1) при заданном формулой (2.2) профиле $\varepsilon_0(z)$ сводится к уравнению нелинейного осциллятора с трением

$$\frac{d^2 X}{dT^2} - \sigma \frac{dX}{dT} + \left(\frac{\sigma^2}{4} - 1 \right) X + 4(\gamma - 1) \xi_m \left(\frac{\lambda}{l_0} \right)^2 \frac{1}{X^3} = 0. \quad (2.3)$$

Начальные данные к уравнению (2.3) имеют вид

$$X_0 = \frac{l(0)}{l_0}; \quad Y_0 = \left(1 + \frac{\sigma}{2} \right) X_0 + 2 \frac{\gamma_0(1)}{\gamma} \frac{L}{l_0} \frac{dL_0}{dz},$$

где $Y \equiv dX/dT$.

Рассмотрим фазовую плоскость уравнения (2.3). Пусть $\gamma > 1$, т.е. в плоскости инжекции волнового пучка нелинейность сильнее дифракции. Типичная структура фазовой плоскости и график показателя преломления представлены на рис.1. Область начальных данных (X_0, Y_0) , при которых пучок успевает сфокусироваться на длине неоднородности L , заштрихована.

Рассмотрим случай $\sigma > 2$, указанный на рис.1а. Особой кривой является сепаратриса $Y_s(X)$ с асимптотикой при $X \rightarrow +\infty$

$$Y_s \approx \left(\frac{\sigma}{2} - 1 \right) X + 2 \xi_m^2 \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma - \sigma)} \left(\frac{\lambda}{l_0} \right)^2 \frac{1}{X^3} + \dots$$

Для начальных данных $Y_0 < Y_s(X_0)$ длина самофокусировки z_f меньше длины неоднородности L . Вблизи фокуса ширина пучка (по главному члену разложения) как и в однородной плазме изменяется по закону

$$l^2(z) \approx 2(z_f - z) \frac{\lambda}{N_f} \left[\frac{N_f}{N_f} \gamma - 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad N_f \equiv N_z(z_f).$$

Предельная расходимость пучка, определяемая условием $z_f = L$, равна

$$\frac{dL_0}{dz_0} = \frac{\gamma}{2\gamma_0(1)} \frac{L_0}{L} [Y_s(X_0) - (1 + \frac{\sigma}{2}) X].$$

В области значений параметра $-2 < \sigma < 2$ фазовая плоскость имеет вид, представленный на рис. 1б. Существует особая точка типа седло

$$Y_c = 0; \quad X_c = \left(\varepsilon_m \frac{\lambda}{l_0} \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{4 - \varepsilon^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Проходящие через нее сепаратрисы являются асимптотиками интегральных кривых при $X \rightarrow +\infty$ и $X \rightarrow 0$. Как и выше они определяют предельную начальную расходимость пучка.

Для $\sigma < -2$ фазовый портрет уравнения (2.3) показан на рис. 1в. Важно отметить, что благодаря быстрому уменьшению групповой скорости волнового пакета самофокусировка пучка происходит в пределах длины неоднородности L для любых начальных данных.

Общий вывод из изложенного состоит в том, что параметры волнового пучка и среды в плоскости инжекции определяют некоторый характерный масштаб неоднородности L_* , такой, что при

$L \leq L_*$ неоднородность значительно (в несколько раз) изменяет длину самофокусировки z_f . Например, для $\sigma > 2$ характерный масштаб неоднородности L_* находится из уравнения

$Y_c(1) = (1 + 0,56)$. При профиле $\varepsilon_0(z)$, близком к линейному, имеем оценку $L_* \approx (l_0 E_p N / 4 E_m)$. В этом случае для $L = L_*$, как следует из результатов работы [8], длина самофокусировки коллимированного пучка сокращается в два раза. Очевидно, что с ростом начальной расходимости пучка $d l_0 / dz$ характерный масштаб неоднородности L_* также увеличивается.

Для заданной величины перепада диэлектрической проницаемости $\varepsilon_0(z)$ на расстоянии L влияние неоднородности сильнее при более крутых профилях $\varepsilon_0(z)$ около плоскости инжекции.

В общем случае произвольной степенной нелинейности $\varepsilon_2(A_c^2) = \varepsilon_0(z) + (A_c/E_p)^{2\beta}$, отличающейся от кубической ($\beta \neq 1$), вместо (2.1) из (1.4) получим следующее уравнение

$$\left(l_0 N_z \frac{d}{dz} \right)^2 f + \frac{\beta}{f^{1+2\beta}} \left[\left(\frac{E_m}{E_p} \right)^2 \frac{N_0}{N_z} \right]^{\beta} - \left(\frac{\lambda}{l_0} \right)^2 \frac{1}{f^3} = 0, \quad (2.4)$$

где $\beta > 0$. С помощью подстановки

$$f(z) = F(\xi) \left(\frac{N_0}{N_z} \right)^s; \quad \frac{dz}{d\xi} = l_0 N_0 \left[\frac{N_z(z)}{N_0} \right]^{2s-1} \quad (2.5)$$

с $s = \frac{\beta}{2(\beta-1)}$ уравнение (2.4) приводится к виду

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \left(\phi^2 + \frac{d\phi}{d\xi}\right)F + \beta \left(\frac{E_m}{E_p}\right)^{2\beta} \frac{1}{F^{1+2\beta}} = \left(\frac{\lambda}{L_0}\right)^2 \frac{1}{F^3}, \quad (2.6)$$

где $\phi = s \frac{d}{d\xi} \ln N_x$. Из формул (2.5), (2.6) следует, что при профиле диэлектрической проницаемости в неоднородной среде

$$\varepsilon_0(x) = N_0^2 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{2(\beta-1)}, \quad (2.7)$$

уравнение (2.6) один раз интегрируется

$$\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 - \left(\frac{\beta N_0 L_0}{2} F\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{L_0} \frac{1}{F}\right)^2 - \left(\frac{E_m}{E_p} \frac{1}{F}\right)^{2\beta} = \mathcal{E}. \quad (2.8)$$

Здесь $\mathcal{E} = \text{const}$. Дальнейшее исследование (2.8) элементарно. Отметим лишь, что при $\beta < 1$ и достаточно большой длине неоднородности

$$L > \frac{\beta N_0 (L_0)}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\beta(1+\beta)} \left(\frac{E_m}{E_p}\right)^{2\beta} \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2\right]^{\frac{1}{1-\beta}} \equiv L_{\min} \quad (2.9)$$

возможен режим волноводного распространения с $F = \text{const}$, когда радиус волновода изменяется монотонно, в соответствии с формулами (2.5), (2.7). Кроме того, в случае $\beta < 1$ и малой длины неоднородности $L < L_{\min}$ вклад от неоднородности в потенциал нелинейного осциллятора (2.8) настолько велик, что коллимированный пучок не самофокусируется. Формулу (2.9) можно переписать в виде порога снизу на амплитуду самофокусирующегося волнового пучка, а именно: коллимированный пучок самофокусируется, если в плоскости инъекции нелинейная часть диэлектрической проницаемости удовлетворяет условию

$$\left(\frac{E_m}{E_p}\right)^{2\beta} > \frac{2}{\beta(1+\beta)} \left(\frac{\lambda}{L_0}\right)^2 \left[\frac{\beta N_0 L_0}{2} \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{1-\beta}.$$

В случае волнового пучка с эллиптической формой сечения и степенной нелинейности $\varepsilon_2 = \varepsilon_0(x) + (A_c/E_p)^{2\beta}$ сделаем в уравнениях (1.9) подстановку ($\beta \neq 1$)

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{N_0}{N_x}\right)^s f_1; \quad \frac{b}{b_0} = \left(\frac{N_0}{N_x}\right)^s f_2; \quad d\xi = \frac{1}{R_0 N(x)} \left(\frac{N_x}{N_0}\right)^{2s} dx,$$

где $R_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$, а s определено выше. В результате (1.9) преобразуется к виду

$$f_1 \left(\frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + G f_1\right) \sin^2 \theta_0 + \frac{\beta}{(f_1 f_2)^{\beta}} \left(\frac{E_m}{E_p}\right)^{2\beta} = \frac{1}{f_1^2 a_0^2} \left(\frac{\lambda}{L_0}\right)^2, \quad (2.10)$$

$$f_2 \left(\frac{d^2 f_2}{dz^2} + G f_2 \right) \cos^2 \theta_0 + \left(\frac{\beta}{f_1 f_2} \right)^2 \left(\frac{E_m}{E_p} \right)^{2\beta} = \frac{1}{f_2^2} \left(\frac{\lambda}{b_0} \right)^2.$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\alpha_0}{R_0} = \sin \theta_0; \quad G = -S \frac{d^2}{dz^2} \ln N_z - S^2 \left(\frac{d}{dz} \ln N_z \right)^2.$$

Система уравнений (2.10) удобнее системы (2.9), так как неоднородность входит более простым путем через функцию $G(z)$. Причем из (2.10) видно, что существует класс профилей неоднородности, задаваемой условием $G = \text{const}$, когда задача может быть сведена к решению уравнения первого порядка. Действительно, в этом случае система уравнений (2.10) имеет интеграл

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{df_1}{dz} \right)^2 + G f_1^2 \right] \sin^2 \theta_0 + \left[\left(\frac{df_2}{dz} \right)^2 + G f_2^2 \right] + \frac{1}{f_1^2} \left(\frac{\lambda}{a_0} \right)^2 + \frac{1}{f_2^2} \left(\frac{\lambda}{b_0} \right)^2 \\ & - \frac{2}{(f_1 f_2)^\beta} \left(\frac{E_m}{E_p} \right)^{2\beta} = \mathcal{E} = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Как видно из (2.11) неоднородность среды входит через потенциал $G(f_1^2 \sin^2 \theta_0 + f_2^2 \cos^2 \theta_0)$. Введем функцию

$$\rho(z) \equiv f_1^2 \sin^2 \theta_0 + f_2^2 \cos^2 \theta_0 = \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left(\frac{N_z}{N_0} \right)^{2s}.$$

Нетрудно показать, что она подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} + 4G\rho = 2\mathcal{E}, \quad (2.12)$$

с начальными данными $\rho_0 = 1$ и $\rho'_0 = 2N_0(dR/dz) + 2sR_0(dN_z/dz)$ при $z = \zeta = 0$. Интегрируя (2.12) находим функцию $R(\zeta)$ и после подстановки в (2.11) приходим к следующему уравнению первого порядка для угловой переменной

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left[G + \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 \right] + \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{R}{R_0} \left(\frac{N_z}{N_0} \right)^s \right] \right\}^2 + \left(\frac{N_z}{N_0} \right)^{2s} \left(\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\lambda}{R} \right)^2 \\ & - 2 \left[\left(\frac{N_0}{N_z} \right)^2 \left(\frac{R_0}{R} \frac{E_m}{E_p} \right)^2 \frac{\sin \theta_0 \cos \theta_0}{\sin \theta \cos \theta} \right]^\beta = \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

которое можно проинтегрировать численно. Начальные данные к уравнению (2.13) имеют вид: $\theta = \theta_0$ и $d\theta/dz = N_0 b_0 \cos \theta_0 \times d(a/b)/dz$ при $z = \zeta = 0$. В случае профиля показателя преломления

$$N_z(z) = N_0 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{1-\beta}; \quad \xi = \frac{L}{R_0 N_0} \ln\left(\frac{L}{L-z}\right),$$

входящая в уравнение (2.13) функция $R(z)$ определяется выражением

$$\frac{R^2}{R_0^2} = 1 + \frac{\xi}{\kappa^2} (1-H)^2 + \frac{L}{R_0} \frac{(1-H^2)}{\beta} \left(\frac{dR}{dz}\right)_{(z)},$$

где $\kappa = \beta N_0 \frac{R_0}{L}$, $H(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right)^\beta$.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ САМОФОКУСИРОВКИ ВОЛНОВОГО ПУЧКА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Развитая модель учитывает ряд физических факторов, характеризующих резко отличающимися параметрами. Так длина неоднородности, ширина пучка и длина волны могут отличаться на два и более порядков величины, также уменьшается в области фокуса более чем на два порядка характерный масштаб изменения функций

$u(t)$, $\varepsilon_z(t)$. Математические модели, отражающие подобные особенности реальных физических процессов, обычно содержат системы жестких дифференциальных уравнений [15]. Свойства жесткости нелинейных уравнений системы (1.6) было принято во внимание при выборе конечно-разностного метода решения. Для интегрирования (1.6) с соответствующими начальными данными использована методика Гира [16, 17] с эффективным автоматическим выбором шага интегрирования и порядка метода. Данный выбор дал возможность корректного исследования образования многофокусной структуры волнового пучка в неоднородной среде. Имеет значение и то, что в отличие от явных разностных схем Рунге-Кутты, Адамса и более высоких степеней, с помощью методики Гира удается значительно сократить время счета.

Приведем результаты численного эксперимента. Исследовалась самофокусировка широкого волнового пучка $L_0 \gg \lambda$ в слабонеоднородной среде $L \gg L_0$ с достаточно малым затуханием $\alpha_e L \ll 1$. В качестве основного варианта были взяты следующие значения параметров

$$\alpha_1 = \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_p}\right)^2 = 0,05; \quad \alpha_2 = \frac{l_0}{\lambda} \varepsilon_i = 0,01; \quad \alpha_3 = \left(\frac{\lambda}{l_0}\right)^2 = 0,01; \quad \alpha_4 = \frac{l_0}{L} = 0,1; \\ \rho_0 = 1,$$

т.е. $\varepsilon_i = 10^{-3}$, $l_0 = 10\lambda$, $L = 100\lambda$. Плоскости инъекции соответствует $t = 0$, поверхности отсечки $t = 10$. Следовательно, область прозрачности для волн малой амплитуды расположена в слое $0 \leq t \leq 10$. Отметим, что в данном случае просветление неоднородной среды за поверхностью отсечки ($t > 10$) начинается с уровней нелинейности $\alpha_1 \gtrsim 0,02$.

В линейной теории коэффициент поглощения (по мощности) плоской волны равен $q_\nu = 1 - \exp\{-q_0\}$, где $q_0 = 2\alpha_2/\alpha_4$. При указанных выше значениях параметров имеем $q_0 = 0,2$ и $q \approx 0,18$.

Для основного варианта результаты интегрирования уравнений (1.6) приведены на рис.2. Рассмотрим рис.2а и рис.2б, на которых представлены графики соответственно полной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_z(t)$, ширины пучка $u(t)$, как функции расстояния $t = z/l_0$ от плоскости инъекции коллимированного пучка ($U_0 = 0$). Прежде всего видим, что в согласии с данным в работе [12] критерием $\alpha_1 > 1,6\alpha_3$, первый фокус находится в области линейной прозрачности $t_f^{(1)} \approx 8,6$ ($z_f^{(1)} \approx 8,6l_0$), $\varepsilon_z(z_f^{(1)}) \approx 0,14$. Большое отличие ε_z от ε_0 проявляется при $\varepsilon_0 < 0,2$. В фокальном пятне ширина пучка уменьшается почти на порядок, плотность энергии на оси пучка возрастает примерно в 80 раз и происходит практически полное насыщение нелинейности $\varepsilon_z \approx 1$, $(A_c^2/\varepsilon_p^2) \approx 4$. Между первым и вторым фокусами ширина пучка достигает максимального значения $l_{max}^{(1)} \approx 0,61 l_0$, а минимум диэлектрической проницаемости ε_z равен $\varepsilon_{min}^{(1)} \approx 0,22$. Второй фокус отстоит от первого на расстоянии $\Delta z_{1,2} \approx 4,2 \times \times l_{max}^{(1)}$, т.е. длина самофокусировки составляет примерно две ширины пучка $l_{max}^{(1)}$, что подтверждает аналитические результаты работ [8,12]. По мере прохождения в непрозрачную для волн малой амплитуды область ($\varepsilon_0 < 0$) максимальная ширина пучка $u_{max}^{(n)}$ и длина самофокусировки вначале несколько уменьшается, например, $u_{max}^{(6)} \approx 0,48$ и $\Delta z_{6,7} \approx 3,1 \times \times l_{max}^{(6)}$ при $z_f^{(6)} \approx 17,8 l_0$, а затем (после восьмого фокуса) они начинают возрастать. Следует обратить внимание на следующее. Во-первых, наиболее сильно ширина пучка уменьшается после первого фокуса, что соответствует указанному

в [12] захвату пучка в режим волноводного распространения. В то же время минимальная ширина пучка, определяющая размер фокального пятна, практически постоянна при значительном изменении $\varepsilon_0(z)$. Во-вторых, минимальное значение диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{min}^{(n)}$, достигаемое при $u_{max}^{(n)}$, монотонно убывает по мере прохождения пучка в сторону роста $|\varepsilon_0(z)|$ в области линейной непрозрачности ($\varepsilon_0 < 0$). Как будет видно ниже, это обстоятельство является одной из причин естественного ограничения глубины проникновения пучка в непрозрачную среду с убывающей $\varepsilon(z)$. Наконец, фактор насыщения нелинейности I_{max} также постепенно спадает с ростом $|\varepsilon_0(z)|$.

Рассмотрим поглощение энергии самофокусирующегося волнового пучка. Переносимая пучком мощность $P(t)$ равна $P_0 W(t)$. График функции $W(t)$ приведен на рис.2в. В исследуемом режиме распространения волнового пучка согласно выводам работы [12] нелинейность уменьшает диссипацию энергии пучка. Действительно, как видно из рис.2в, в слое линейной прозрачности $0 \leq t \leq 10$ поглощение энергии пучка равно 5,4%, что примерно в три раза меньше результата линейной теории. В слое $n_0(z) < 2,6 n_c$ (где n_c критическая плотность) поглощение энергии достигает 28,5%. Однако реально вследствие генерации отраженной волны проникновение пучка в область непрозрачности будет ограничено на уровне $n_0(z) \approx 2 n_c$, которому соответствует поглощение энергии приблизительно 17,5%, что немного меньше линейного результата 18,1%. Из рис.2в также следует, что в фокальной области темп поглощения энергии пучка пренебрежимо мал. Между фокусами он достигает максимума при $u_{max}^{(n)}$, а в среднем монотонно возрастает в направлении движения пучка благодаря уменьшению групповой скорости волнового пакета. Приблизительно имеем $\langle W(t) \rangle \approx \sqrt{1 - \alpha t}$, где $\alpha \approx 1/55$.

Был вычислен также параметр ВКБ $\psi = 3\kappa^2 l^2 \equiv 3\lambda^2 N_z^2 / \alpha_z$, график которого приведен на рис.2г. В плоскости инъекции $\psi = 300$. Как видно из рис.2г, функция $\psi(t)$ осциллирует синхронно с изменениями ширины пучка $u(t)$, постепенно убывая в направлении распространения пучка. Наибольший спад ψ , как и ширины пучка $u(t)$, происходит до первого фокуса. Так между первым и вторым фокусами максимальное значение ψ , достигается при $u_{max}^{(1)}$ и равно $\psi_{max}^{(1)} \approx 27$, что более чем на порядок меньше начального значения. В области $\varepsilon_0(z) > -1$

параметр ВКБ минимален в фокусах, причем минимальное значение медленно уменьшается от $\psi_{min}^{(1)} \approx 4$ до $\psi_{min}^{(6)} \approx 3$. Максимум $\psi(t)$ (между фокусами) убывает гораздо энергичнее от $\psi_{max}^{(1)} \approx 27$ до $\psi_{max}^{(4)} \approx 7$ при $\varepsilon_0(z) \approx -1$. В области $\varepsilon_0(z) < -1$ минимумы ψ приходятся на минимумы $\varepsilon_z(t)$. Убывание ψ приводит к росту эффективности генерации волн, бегущих в обратном направлении. Поэтому в рассматриваемой модели именно значительное снижение величины ψ дает даже в отсутствие диссипации ограничение глубины проникновения пучка в область непрозрачности. Как видно из рис. 2г, вначале отражение максимально в окрестности фокальных пятен. Оценки показывают, что на уровне первого фокуса, где $\psi \approx 4$, отражение по потоку энергии порядка нескольких процентов, т.е. еще невелико. В дальнейшем $t \gtrsim 18$ отражение существенно и вне фокальных пятен, при $l \approx l_{max}$. В целом следует ожидать, что в результате потери мощности из пучка за счет накопления отражений в окрестности фокусов и общего снижения ψ ниже уровня $\psi_* = 5$ в области $t > 20$, реальная глубина проникновения пучка в область непрозрачности $\varepsilon_0(z) < 0$ ограничится уровнем $\varepsilon_0 \approx -1$.

Необходимо отметить, что генерация обратных волн приводит, во-первых, к потере мощности в пучке прямых волн, что аналогично диссипации энергии, а во-вторых, обратные волны будут создавать на профиле диэлектрической проницаемости ε_z мелкомасштабную гребенку с $\Delta z \sim 1/\mu_z(z)$. Корректный учет отражения требует решения нестационарной задачи. Главное, что даже при статической нелинейности глубина проникновения пучка в непрозрачную область оказывается ограниченной за счет образования областей сильного отражения волн.

Зависимость самофокусировки от длины неоднородности исследовалась изменением параметра α_4 в основном варианте. На рис. 3 и рис. 4 приведены результаты счета в случаях соответственно $\alpha_4 = 0,05$ ($L = 20 l_0$) и $\alpha_4 = 0,2$ ($L = 5 l_0$) для коллимированного пучка. Сравнивая рис. 2 и рис. 3, рис. 4 приходим к выводу, что с уменьшением длины неоднородности L первый фокус ($z_f^{(1)}(\alpha_4)$) приближается к плоскости инъекции: $z_f^{(1)}(0,05) \approx 14 l_0$; $z_f^{(1)}(0,1) \approx 8,6 l_0$; $z_f^{(1)}(0,2) \approx 5,6 l_0$. При достаточно больших L ($\alpha_4 = 0,05$) отчетливо видно дифракционное распыление волнового пучка вблизи плоско-

сти инжекции (рис.3б). Нетрудно проверить, что условие самофокусировки пучка в области прозрачности ($\varepsilon_0 > 0$) соответствует критерию [12].

$$\alpha_1 > 1,3 \sqrt{\frac{l_0^2}{l_*^2} + \frac{l_*^2}{l_0^2}}; \quad l_* = 0,86\sqrt{\lambda L},$$

где l_* оптимальная ширина пучка, минимизирующая параметр нелинейности α_1 . Насыщение нелинейности в фокусе практически полное. С уменьшением длины однородности убывает параметр

$\Delta z_{1,2} / l_{\max}^{(1)}$, принимающий значения соответственно: 5,3; 4,2; 3,4 (рис.3б, рис.4б). Более медленным (рис.3а, рис.4а) становится спадание $\varepsilon_{\min}^{(n)}$ с расстоянием от плоскости инжекции, раньше начинает возрастать $U_{\max}^{(n)}$, например, в случае, $\alpha_4 = 0,2$ U_{\max} начинает увеличиваться уже после второго фокуса.

В области за первым фокусом, где $(\varepsilon_z - \varepsilon_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, длина самофокусировки порядка ширины пучка в согласии с [12].

Из сравнения графиков $W(t)$ следует, что с уменьшением длины неоднородности убывает как поглощение в области прозрачности, так и поглощение во всей области распространения пучка. Далее с ростом α_4 увеличивается спад параметра ВКБ после прохождения первого фокуса: $\psi_{\max}^{(1)}(0,05) \simeq 44$, $\psi_{\max}^{(1)}(0,1) \simeq 27$, $\psi_{\max}^{(1)}(0,2) \simeq 14$. Очевидно, что в случае $\alpha_4 = 0,2$ (рис.4г) проникновение пучка в область непрозрачности ограничивается на уровне второго фокуса.

Была рассмотрена зависимость самофокусировки от характерной длины волны λ путем изменения параметра $\alpha_3 = (\lambda/l_0)^2$ в основном варианте. Для случаев $\alpha_3 = 0,005$ и $\alpha_3 = 0,02$ графики $\varepsilon_z, U, W, \psi$ приведены на рис.5 и рис.6. Сравнивая рис.5, рис.2 и рис.6 видим, что с уменьшением α_3 , первый фокус $z_f^{(1)}(\alpha_3)$ приближается к плоскости инжекции: $z_f^{(1)}(0,005) \simeq 7,8 l_0$, $z_f^{(1)}(0,01) = 8,6 l_0$, $z_f^{(1)}(0,02) \simeq 10,5 l_0$. С ростом λ насыщение нелинейности в фокусе становится неполным (см.рис.6а), ε_{\min} убывает быстрее в направлении движения пучка, а перепад ψ после прохождения первого фокуса увеличивается (см.рис.5г и рис.6г), причем в случае $\alpha_3 = 0,02$ проникновение пучка в область непрозрачности должно ограничиваться вследствие отражения примерно на уровне второго фокуса ($\varepsilon_0 = -0,4$). Для фиксированного параметра диссипации α_2 с ростом α_3 поглощение энергии на задан-

ном расстоянии увеличивается, так как в среднем ε_z меньше при больших α_2 . Например, взяв $t = 14$ имеем $Q_\nu(0,005) \approx 0,085$, а $Q_\nu(0,02) \approx 0,134$. Кроме того с ростом α_2 увеличивается дифракционное распыление в окрестности плоскости инъекции.

Влияние диссипации исследовалось путем изменения в основном варианте параметра $\alpha_2(l/\lambda)/\varepsilon_i$. Результаты счета для значений $\alpha_2 = 0,005$ и $\alpha_2 = 0,05$ приведены соответственно на рис. 7 и рис. 8. Сравнивая рис. 7, рис. 2 и рис. 8 получаем, что с ростом α_2 положение фокусов и длина самофокусировки почти не меняются. Только в случае $\alpha_2 = 0,05$ сильная диссипация заметно снижает ε_{min} , а вследствие этого возрастает поглощение энергии пучка. В области $\varepsilon_o > 0$ по линейной теории коэффициент поглощения при $\alpha_2 = 0,05$ равен $Q_\nu \approx 0,63$, а учет самофокусировки снижает его до величины 0,3. В случае сильной диссипации ($\alpha_2 = 0,05$) хорошо видно неполное насыщение нелинейности в фокусе, хотя \mathcal{U}_{min} изменилось очень слабо, и заметна тенденция к дефокусировке уже после четвертого фокуса. Для $\alpha_2 = 0,05$ глубина проникновения пучка в область непрозрачности видимо, будет порядка $\Delta z \sim (4+6) l_o$, т.е. $\varepsilon_o = -0,5$.

В основном варианте рассматривалось влияние начальной расходимости пучка на его самофокусировку. Результаты счета для $U_o = 0,01$; $U_o = 0,1$ приведены на рис. 9 и рис. 10. При взятом уровне нелинейности предельная расходимость самофокусирующегося пучка порядка $U \sim \alpha_1^{1/2} \approx 0,23$. Действительно, в случае $U_o = 0,5$ счет показал монотонное распыление пучка за счет преобладающей роли дифракции и необходимость учета отражения всего пучка в окрестности поверхности отсечки $\varepsilon_o = 0$. Сравнение рис. 9, рис. 2, рис. 10 приводит к выводу, что с ростом расходимости U_o влияние нелинейности резко ослабляется при $U_o \approx 0,1$. Так первый фокус отодвигается от плоскости инъекции пучка, в частности, при $U_o = 0,1$ он расположен в области непрозрачности $z'' \approx 13,1 l_o$, т.е. $\varepsilon_o \approx -0,31$. При этом поглощение энергии увеличивается. Например, на уровне $t = 13,1 l_o$ для $U_o = 0,01$ имеем $Q_\nu = 0,1$, а в случае большой расходимости $U_o = 0,1$ получаем $Q_\nu \approx 0,33$. Характерно поведение ширины пучка \mathcal{U} (рис. 10 б) и параметра ВКБ Ψ (рис. 10 г) при расходимости $U_o = 0,1$. Видно, что для умеренной нелинейности основного варианта глубина проникновения пучка в область непрозрачности снижается с ростом U_o . В частности, при $U_o = 0,1$ за

первым фокусом главным становится эффект отражения пучка.

Для основного варианта приведем также случай большей нелинейности $\alpha_1 = 0,1$, представленный на рис.11. Из сравнения рис.2 и рис.11 видно, что с ростом параметра нелинейности поглощения

$Q_\nu(\alpha_1)$ падает. Так на уровне $\varepsilon_0 = 0$ имеем $Q_\nu(0,05) = 0,054$, а $Q_\nu(0,1) \approx 0,038$. Далее при $\varepsilon_0 = -1$ получаем $Q_\nu(0,05) \approx 0,175$ и $Q_\nu(0,1) \approx 0,1$. С ростом α_1 повышаются $\varepsilon_{min}^{(n)}$ и $\psi_{max}^{(n)}$. Например, за первым фокусом: $\varepsilon_{min}^{(n)}(0,05) \approx 0,23$, $\psi_{max}^{(n)}(0,05) \approx 27$; $z_f^{(n)} \approx 8,6 l_0$, $\varepsilon_{min}^{(n)}(0,1) \approx 0,41$; $\psi_{max}^{(n)}(0,1) \approx 48$; $z_f^{(n)} \approx 7 l_0$.

На рис.12 приведены графики диэлектрической проницаемости $\varepsilon_z(t)$ и ширины пучка $U(t)$ для случая малого уровня нелинейности и слабой дифракции $\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_2 = 0,01$, $l_0 = 100 \lambda$, $L = 100 \lambda$.

Этот уровень нелинейности выше порогового $\alpha_1 > 2,6 \frac{\lambda}{L}$ и пучок самофокусируется около поверхности $\varepsilon_0 = 0$. Однако, как видно из рис.12, за первым фокусом происходит монотонная фокусировка пучка и быстро нарушаются условия применимости нелинейного ВКБ. Следовательно, за первым фокусом пучок, расплываясь, отражается, т.е. глубина проникновения его в непрозрачную область мала, порядка $\varepsilon_0 \approx -0,1$. Отметим также, что в рассматриваемом случае поглощение энергии пучка близко к величине, даваемой линейной теорией.

Переход к линейной динамике пучка имеет место при достаточно малом параметре нелинейности либо при выборе больших значений параметра дифракции α_3 или диссипации α_2 . На рис.13 представлены результаты счета в вариантах:

0,05) $\alpha_1 = 0,05$; $\alpha_2 = 0,01$; $\alpha_3 = 0,1$; $\alpha_4 = 0,1$

0,01) $\alpha_1 = 0,01$; $\alpha_2 = 0,01$; $\alpha_3 = 0,05$; $\alpha_4 = 0,1$

Из графиков хорошо видно, что в обоих случаях реализуется линейный режим распространения волнового пучка.

На рис.14 приведены результаты счета в варианте, соответствующем по классификации работы [12] третьему режиму распространения самофокусирующегося волнового пучка в неоднородной среде, когда параметр нелинейности $\alpha_1 = 0,005$, диссипация слаба $\alpha_2 = 0,01$, пучок широкий $\alpha_3 = 0,05$ и среда слабонеоднородна $\alpha_4 = 1 \cdot 10^{-4}$.

Из приведенного рассмотрения вытекают следующие выводы.

1. В неоднородной среде при движении волнового пучка в сторону убывания $\varepsilon_0(z)$ ширина пучка существенно уменьшается

после прохождения первого фокуса.

2. При умеренных начальных нелинейностях с ростом градиента диэлектрической проницаемости $\epsilon_0(z)$ поглощение энергии пучка уменьшается.

3. Длина самофокусировки убывает с уменьшением длины неоднородности L .

4. С ростом величины градиента диэлектрической проницаемости $\epsilon_0(z)$ уменьшается глубина проникновения пучка в область непрозрачности $\epsilon_0 < 0$.

5. Даже при слабой диссипации глубина проникновения самофокусирующегося волнового пучка в область непрозрачности ограничена за счет падения параметра ВКБ до уровня, когда существенно отражение пучка.

Изложенное выше показывает, что уже при статической нелинейности в условиях прохождения пучка в область непрозрачности благодаря отражению профиль полной диэлектрической проницаемости ϵ_z должен быть нестационарным.

Литература

- I. Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде. - УФН, 1967, т.93, вып. I, с. I9-70.
2. Беспалов В.И., Литвак А.Г., Таланов В.И. Самовоздействие электромагнитных волн в кубичных изотропных средах. - В сб. "Нелинейная оптика", Новосибирск, Наука, 1968, с.428-463.
3. Луговой В.Н., Прохоров А.М. Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде. - УФН, 1973, т. II, вып. 2, с. 203-247.
4. Сб. "Взаимодействие сильных электромагнитных волн с бесстолкновительной плазмой" под ред. А.Г.Литвака, Горький, ИПФ, 1980, с.
5. Аскаръян Н.А. Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного излучения на электроны и атомы. - ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 6, с. I567-I570.
6. Ерохин Н.С., Мойсеев С.С., Мухин В.В., Новиков В.Е., Тур А.В. Взаимодействие и самовоздействие волн в плазме. - В сб. "Аннотации докладов советско-французского семинара по свч - методам нагрева плазмы, Ленинград, Наука, 1974, с.20.
7. Sodha M.S., Tripathi V.K. Nonlinear penetration of an inhomogeneous laser beam in an overdense plasma. - Physical Review A, 1977, vol. I6, N 5, p. 2I0I-2I04.
8. Ерохин Н.С., Мойсеев С.С., Новиков В.Е. Самофокусировка волновых пучков в нелинейной неоднородной среде. - ЖЭТФ, 1978, т. 48, № 9, с. I769-I774.
9. Ерохин Н.С., Мойсеев С.С., Мухин В.В., Новиков В.Е., Сагдеев Р.З. Самофокусировка и поглощение энергии лазерного пучка в неоднородной плазме. - Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 33, вып. 9, с. 45I-453.
10. Васьков В.В., Гуревич А.В., Караштин А.Н. Тепловая самофокусировочная неустойчивость плазменных волн в области резонанса. - Геомагнетизм и аэронавтика, 1981, т. 2I, № 6, с. 973-980.
- II. Власов С.Н., Гурбатов С.Н. К теории самовоздействия интенсивных световых пучков в плавнеоднородных средах. - Радиофизика, 1976, т. I9, № 8, с. II49-II55.

- I2. Ерохин Н.С., Сагдеев Р.З. Особенности самофокусировки и поглощение энергии мощных волновых пучков в неоднородной плазме - ЖЭТФ, 1982, т.83, вып. I(7), с. I32-I42.
- I3. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. - М., Наука, 1977, гл. IV.
- I4. Ерохин Н.С., Кузелев М.В., Мойсеев С.С., Рухадзе А.А., Шварцбург А.Б. Неравновесные и резонансные процессы в плазменной радиофизике. - М., Наука, 1982, гл. I0.
- I5. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. - М., Наука, 1979.
- I6. Gear C.W. The automatic integration of stiff ordinary differential equations. - Inform. Processing 68, 1969.
- I7. Stiff differential systems. - Proc. Int. Symp. - N.Y.-London, 1974.

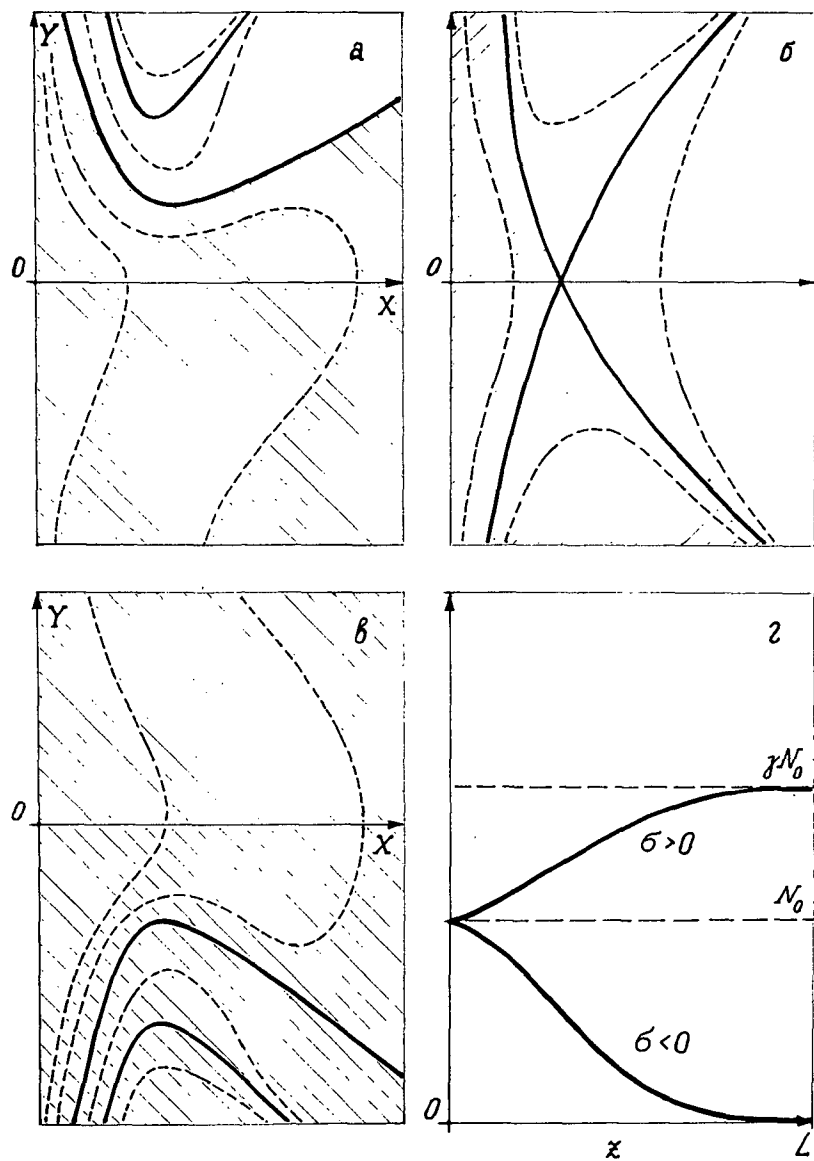


Рис. I

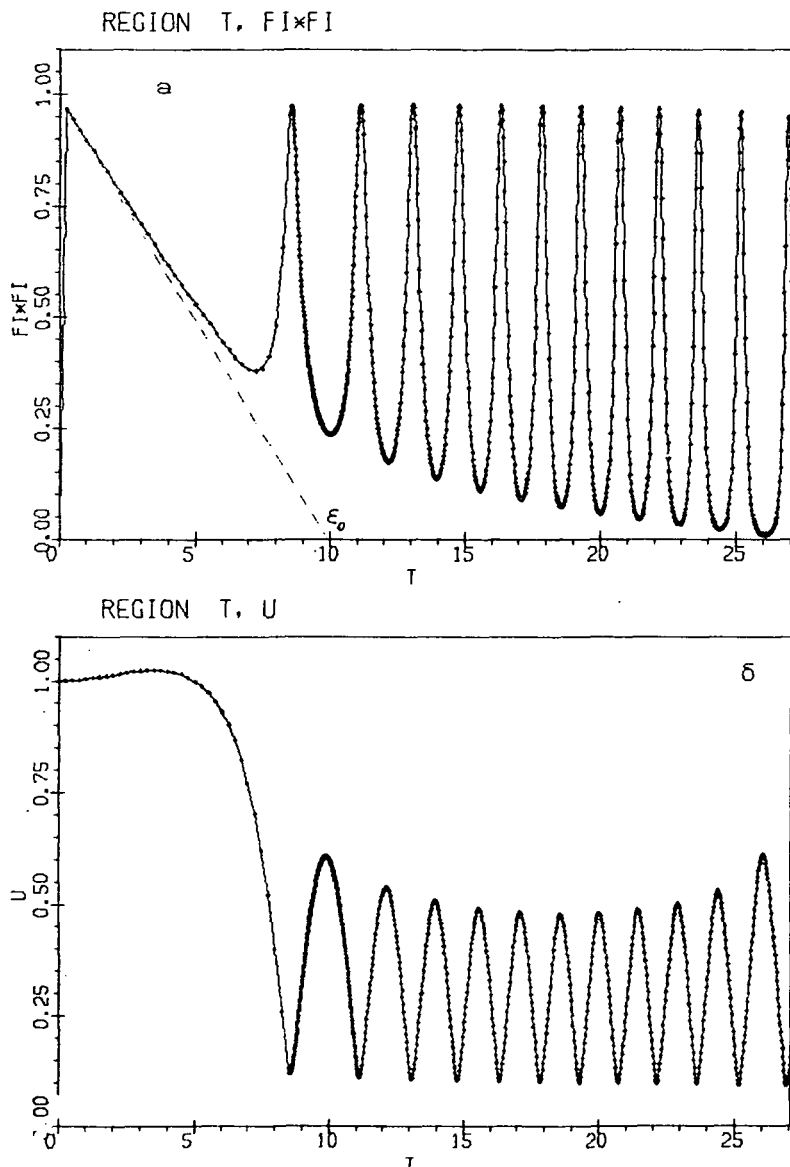
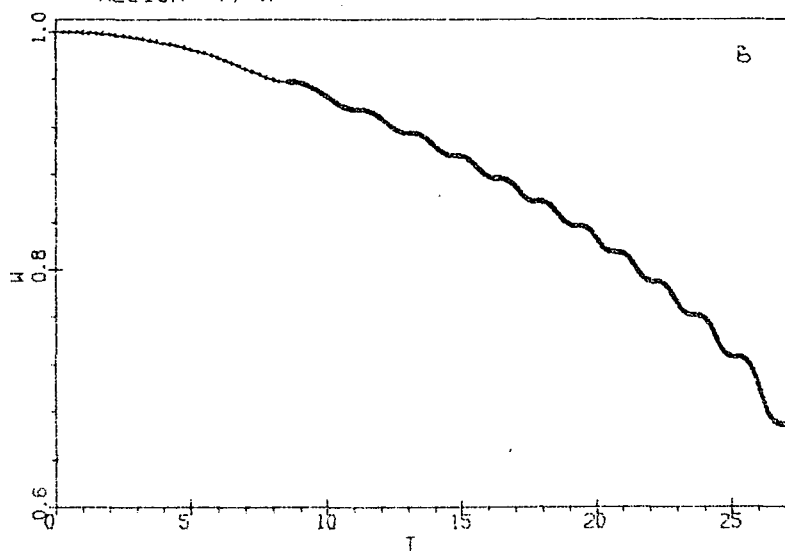


Рис.2 Здесь и на всех последующих рисунках полная диэлектрическая проницаемость ϵ_0 обозначена $FI * FI$.

REGION T, W



REGION T, PSI

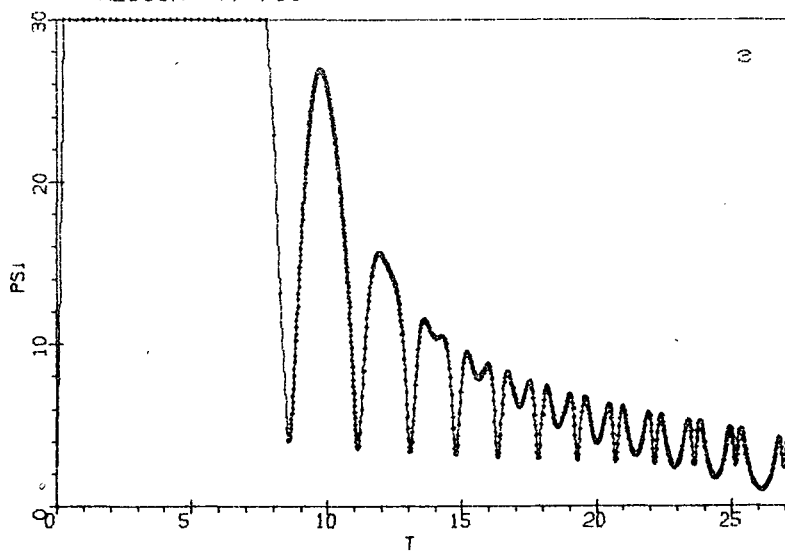


Рис. 2В,г

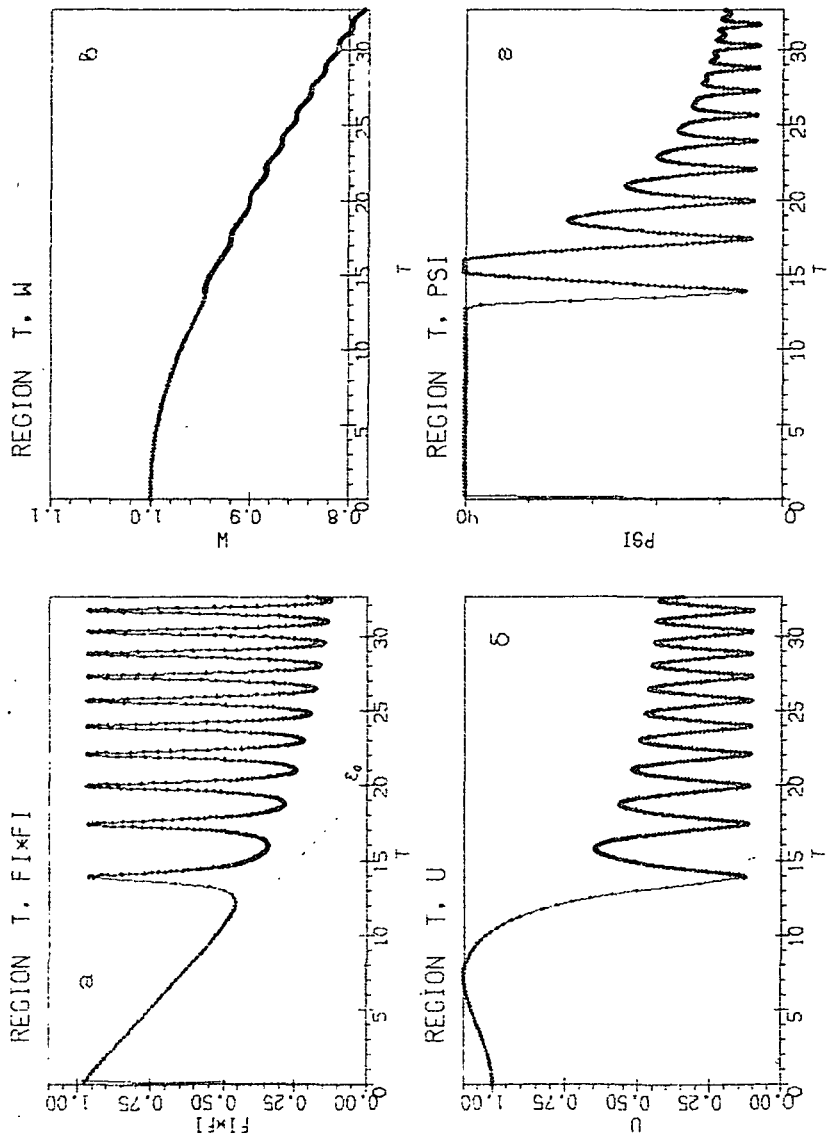


Рис.3

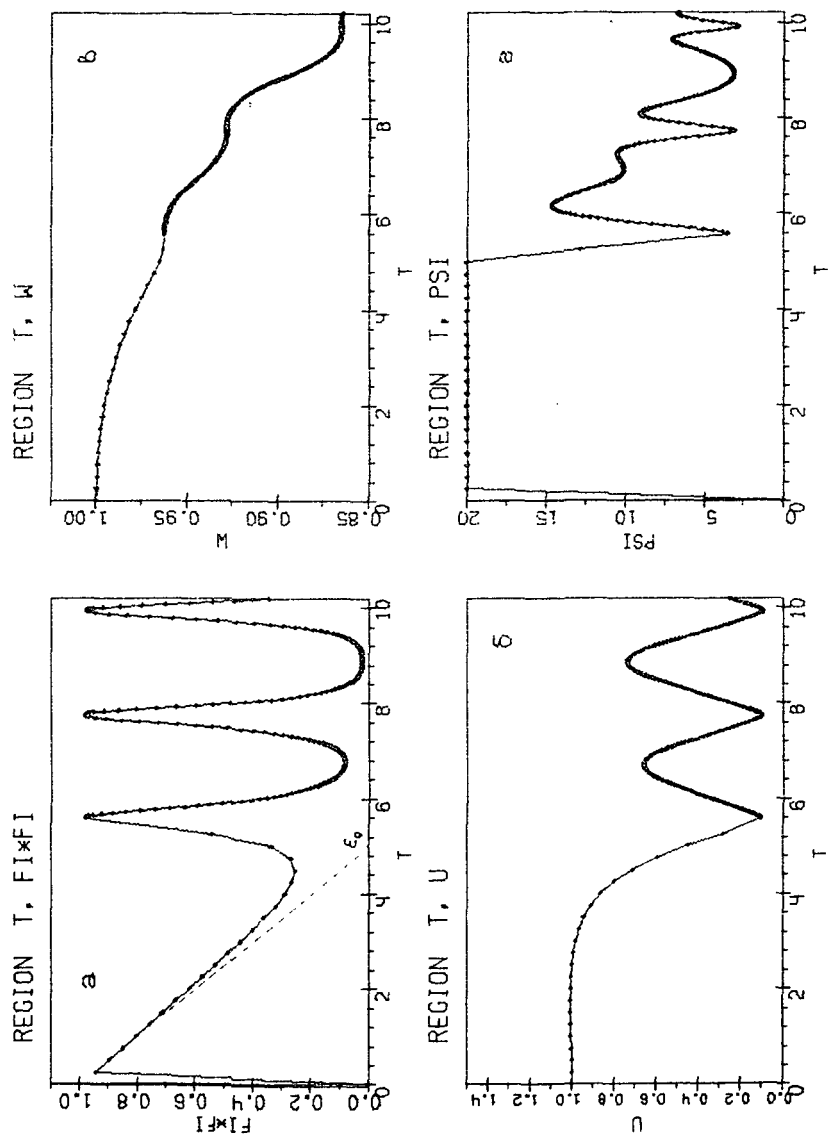


Рис.4

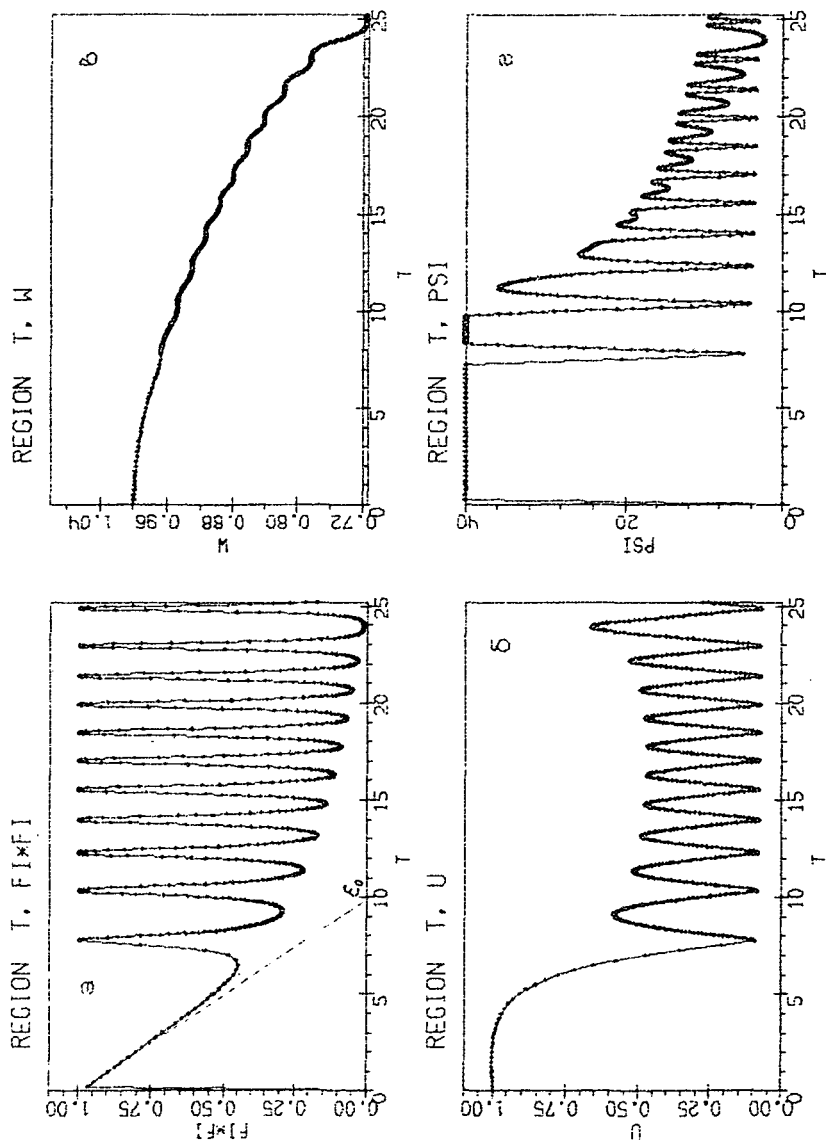


Рис. 5

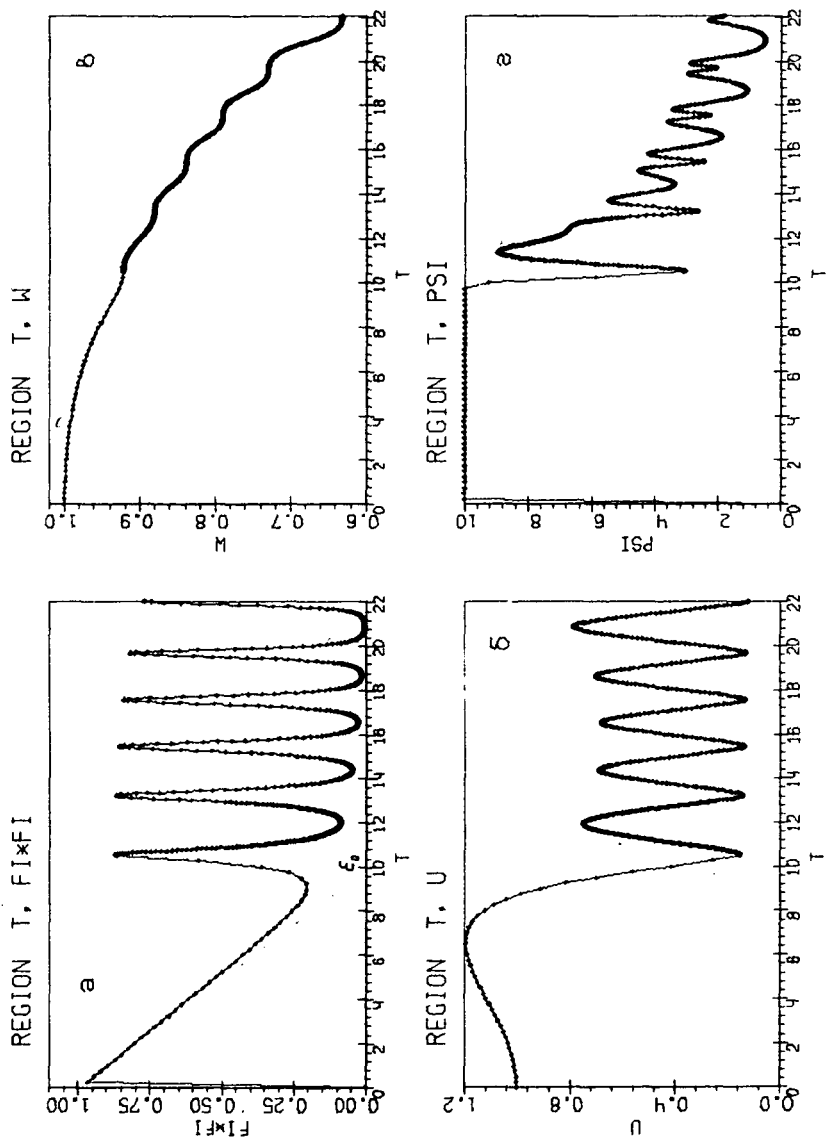
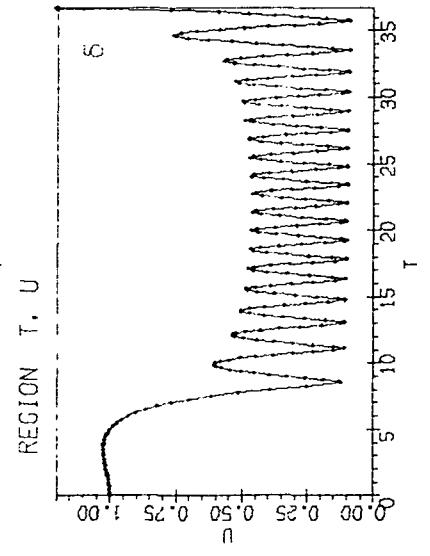
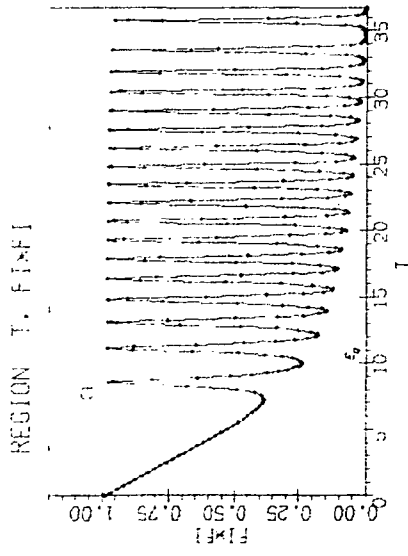
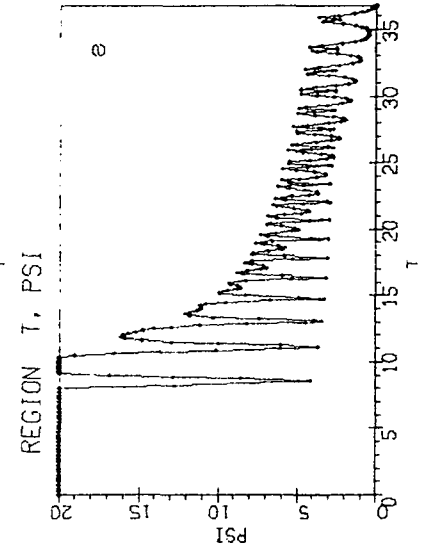
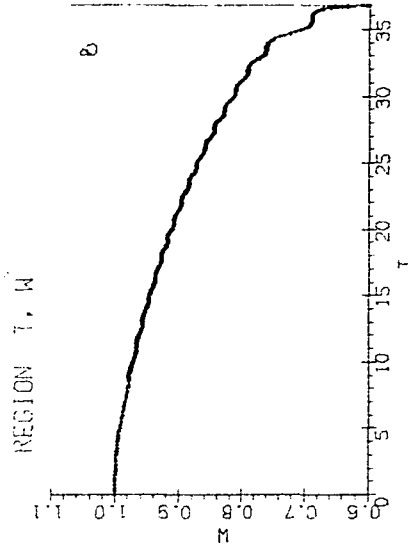


Рис. 6



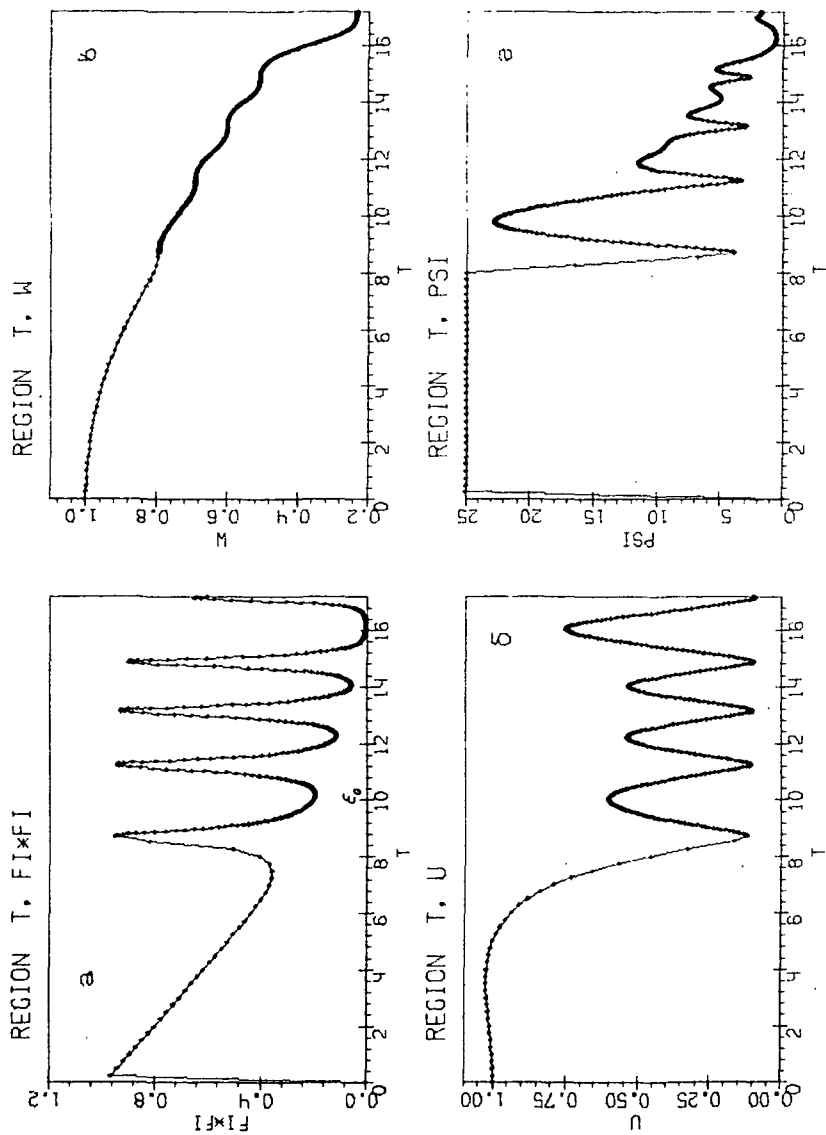


Рис. 8

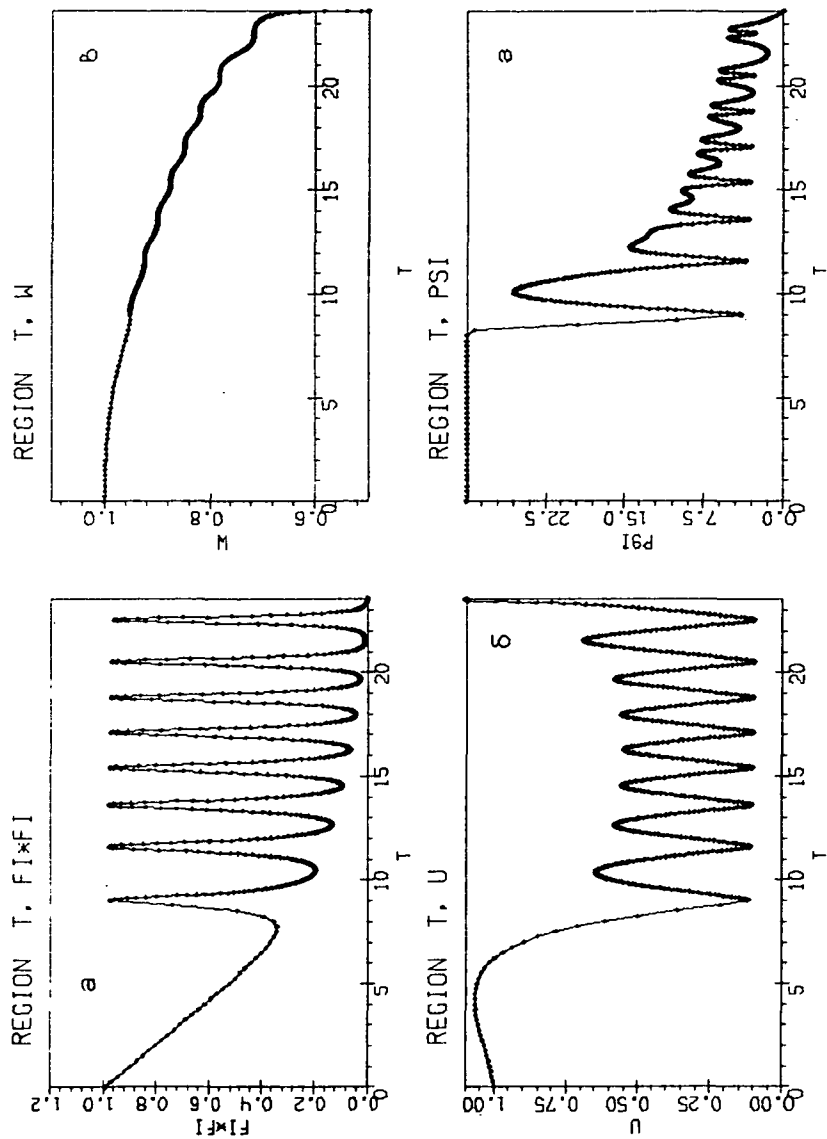


Рис. 9

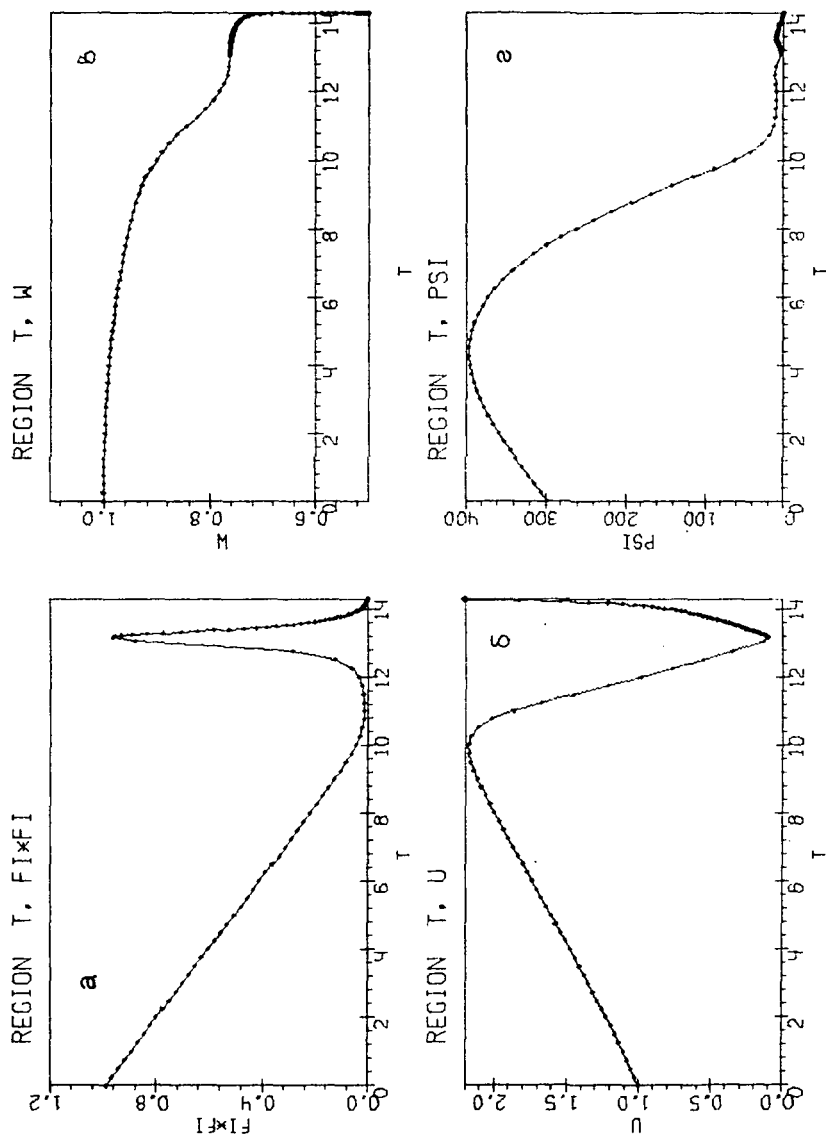
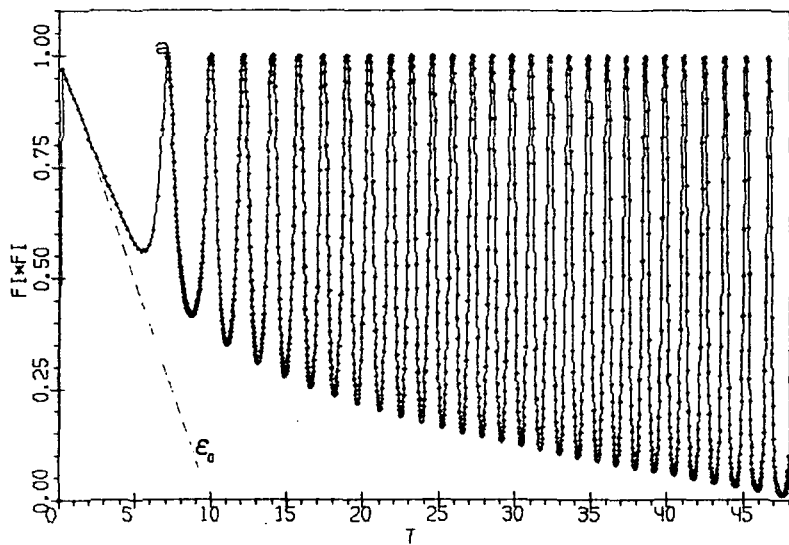


FIG. 10

REGION T, $FI \times FI$ 

REGION T, U

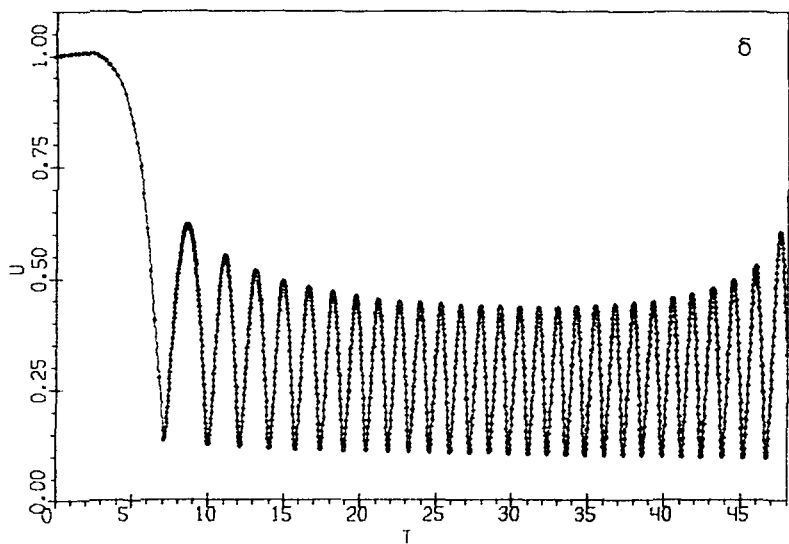
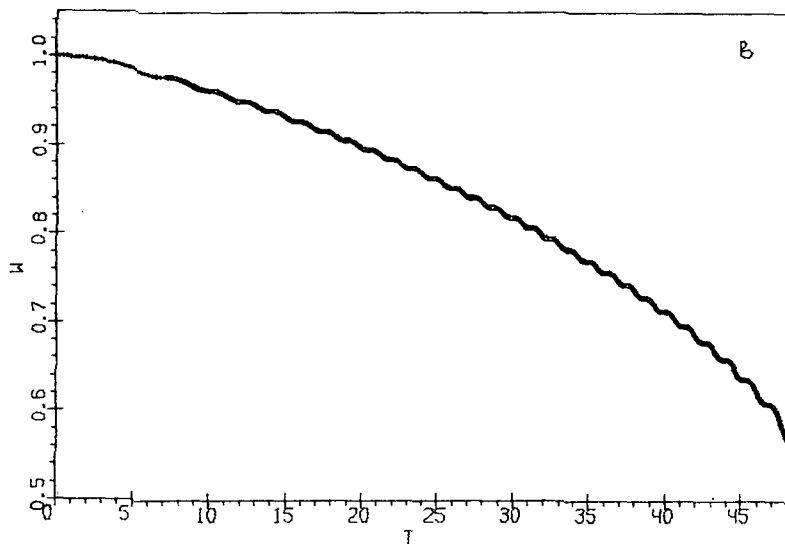


Рис. IIa, б

REGION T, W



REGION T, PSI

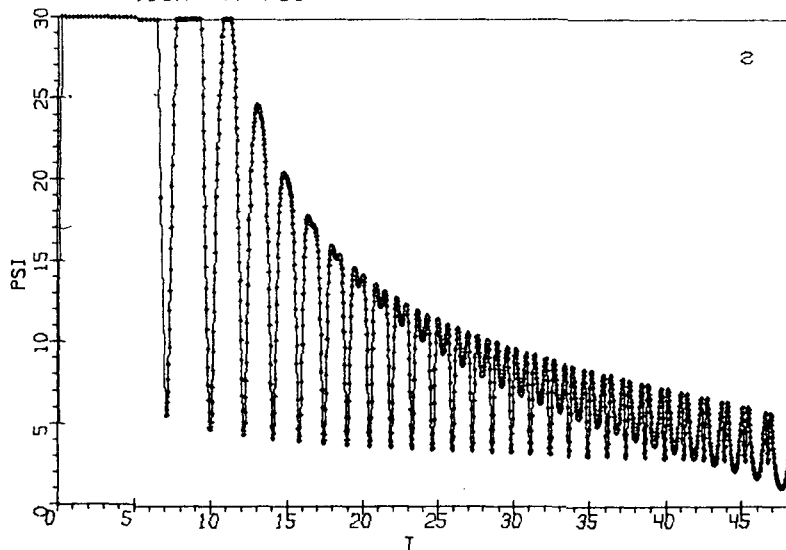


Рис. IIb, r

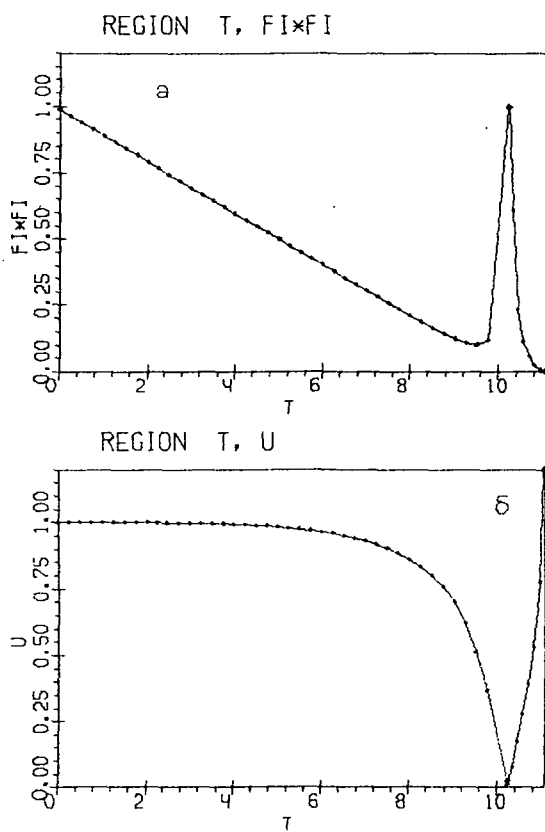


Рис.12

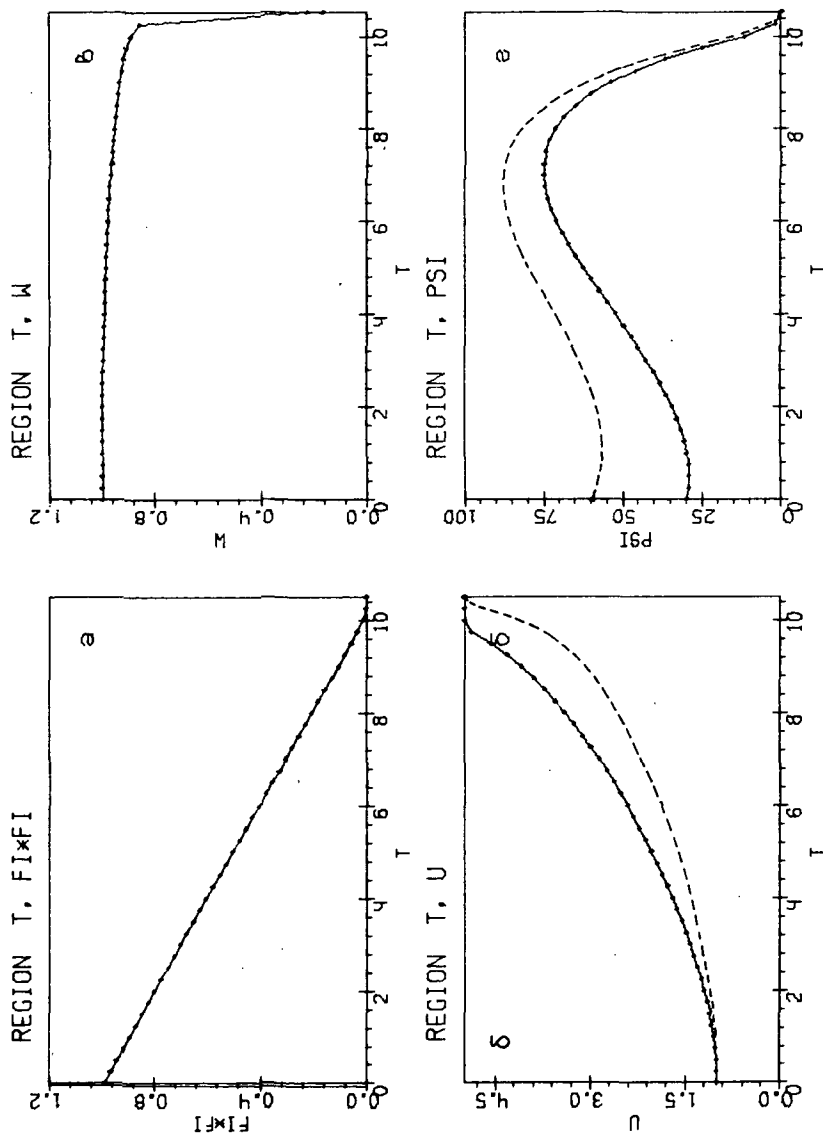


Рис.13 График варианта (0.01) обозначен пунктиром, где он не совпадает с графиком (0.05)

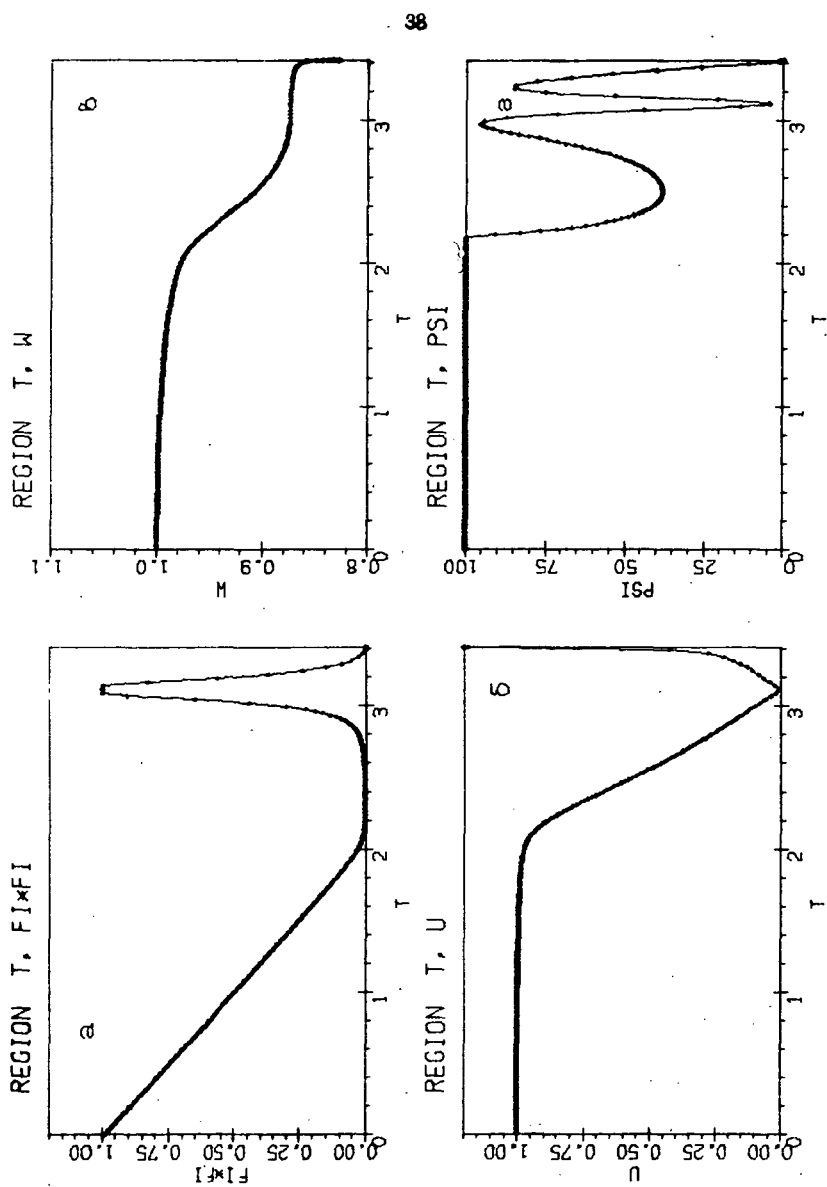


Рис. I 4.

Н.С. Ерохин, А.П. Фадеев " К теории самофокусировки мощных вол-
новых пучков в неоднородных средах. "

Редактор Е.П. Фадеева.

Корректор В.Я. Карпов.

Подписано к печати 06.09.82 г. № Т - 16434. Заказ № 692.

Формат бумаги 60X90 1/16. Тираж 150 экз.

Объем 1,4 уч.изд.л. Цена 10 коп.

055 (02)2

Отпечатано на ротационных в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме:
и. о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша
АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.